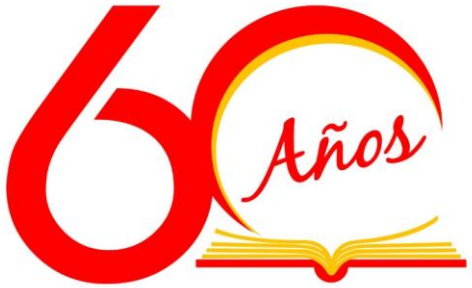
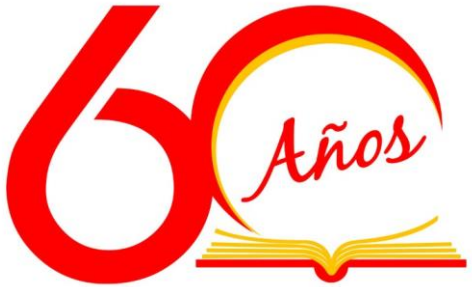
Álgebra



CICLO REPASO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

NÚMEROS COMPLEJOS Y ECUACIONES



CICLO REPASO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$

Forma binómica

$z = x + y\,i \qquad i^2 = -1$

$x = Re(z) \qquad y = Im(z)$

- *complejo real* si:

  $x \neq 0 \ \wedge \ y = 0$

- *complejo imaginario puro* si:

  $x = 0 \ \wedge \ y \neq 0$

- *complejo nulo* si:

  $x = 0 \ \wedge \ y = 0$

- *conjugado* de z

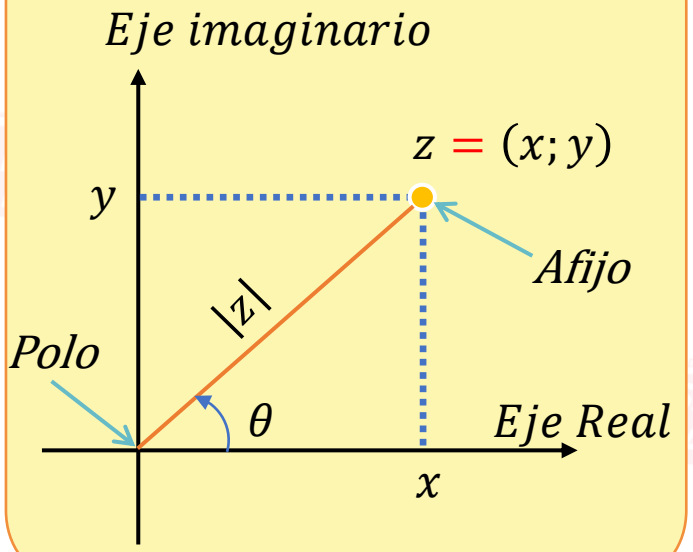
  $\bar{z} = x - yi$

- *opuesto* de z

  $z^* = -x - yi$

Forma de par ordenado

$z = (x; y)$



Forma trigonométrica

$z = |z|\,(cos\theta + isen\theta)$

- Módulo de z

  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Argumento de z

  $Arg(z) = \theta$

Forma *cis*:

$z = |z|\,cis(\theta)$

Forma exponencial:

$z = |z|\,e^{\theta i}$

Obs.:

$cos\theta + isen\theta = cis\theta$

$cos\theta + isen\theta = e^{\theta i}$

NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$

REGLA

$$\frac{a+bi}{m+ni} = \frac{am+bn}{m^2+n^2} + \frac{bm-an}{m^2+n^2}i$$

TEOREMAS

$z = |z|\text{Cis}(\theta)$ $\quad$ $w = |w|\text{Cis}(\alpha)$

$z.w = \lvert z\rvert.\lvert w\rvert Cis(\theta+\alpha)$	$z^n = \lvert z\rvert^n Cis(n\theta)$
$\frac{z}{w} = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert}.Cis(\theta-\alpha)$	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\lvert z\rvert}\text{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

PROPIEDADES:

1) $arg(z.w) = arg(z) + arg(w)$
2) $arg\left(\frac{z}{w}\right) = arg(z) - arg(w)$
3) $arg(z^n) = n.arg(z)$

PROPIEDADES

1) $\lvert z\rvert \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$	5) $\left\lvert\frac{z}{w}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert}$
2) $\lvert z\rvert = \lvert\bar{z}\rvert = \lvert z^*\rvert$	
3) $\lvert z\rvert^2 = z.\bar{z}$	6) $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$
4) $\lvert z.w\rvert = \lvert z\rvert\lvert w\rvert$	7) $\lvert\sqrt[n]{z}\rvert = \sqrt[n]{\lvert z\rvert}$

1) $Si\ z = \bar{z} \leftrightarrow z\ es\ un\ complejo\ real$	
2) $\bar{\bar{z}} = z$	7) $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$
3) $z + \bar{z} = 2Re(z)$	8) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
4) $z - \bar{z} = 2Im(z)\text{i}$	
5) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$	9) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
6) $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$	10) $\overline{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[n]{\bar{z}}$

ECUACIÓN POLINOMIAL

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

donde: x es la incógnita

$a_0;\ a_1;\ \ldots;\ a_n$ son los coeficientes

RAÍZ DE UN POLINOMIO

α es raíz del polinomio $P(x) \leftrightarrow P(\alpha) = 0$

Corolario:

Todo polinomio de grado $n \geq 1$, tiene exactamente n raíces (contadas con la multiplicidad).

Ejemplos

- $P_{(x)} = (x-8)(x-5)^2\,(x+1)^3$

  Sus raíces son: $8\ ,5\ \ ,5\ \ ,-1\ \ ,-1\ \ ,-1$

ECUACIÓN CUADRÁTICA

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Las dos raíces de la ecuación

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donde: $\Delta = b^2 - 4ac$ y es llamado **discriminante**

Se cumple:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Considerando los coeficientes reales

$\Delta > 0$	Raíces reales diferentes
$\Delta = 0$	Raíces reales e iguales (única solución)
$\Delta < 0$	Raíces imaginarias conjugadas

ECUACIÓN POLINOMIAL DE GRADO SUPERIOR

Su forma general es:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

- Tiene m soluciones $(1 \leq m \leq n)$.

RESOLUCIÓN (para problemas tipo)

i. Darle su forma general.

II. Factorice.

iii. Iguale a cero cada factor para encontrar las raíces.

iv. Indique el conjunto solución.

TEOREMA DE CARDANO-VIETTE

Si $x_1;\ x_2;\ x_3$ son las raíces de la ecuación

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ ;\ a \neq 0$$

$+ \quad - \quad + \quad -$

Se cumple que:

$$S_1: \quad x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$S_2: \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$$

$$S_3: \quad x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$$

TEOREMAS DE PARIDAD DE RAÍCES

1) Sea una ecuación polinomial de coeficientes racionales, se cumple:

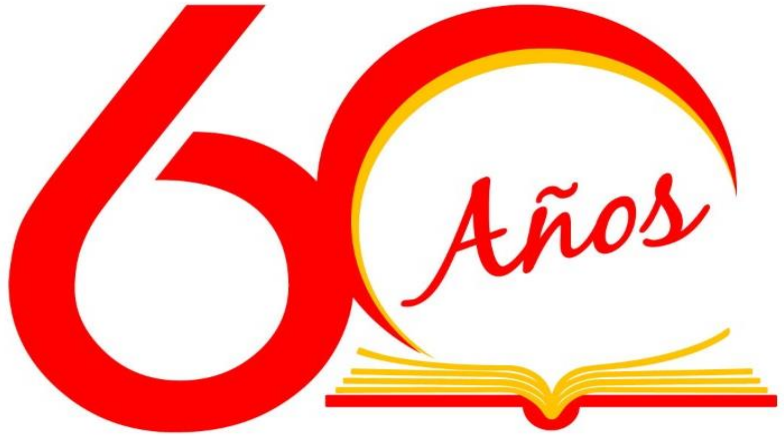
$$a + \sqrt{b} \text{ es raíz} \quad \leftrightarrow \quad a - \sqrt{b} \text{ es raíz}$$

Donde $a, b \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{b} \in I$

2) Sea una ecuación polinomial de coeficientes reales, se cumple:

$$a + bi \text{ es raíz} \quad \leftrightarrow \quad a - bi \text{ es raíz}$$

Donde $a, b \in \mathbb{R};\ b \neq 0$ y $i = \sqrt{-1}$



¡Gracias!